Digitale Bibliothek Braunschweig

Zur mathematischen Beschreibung mechanischer Systeme - Kurzfassung -

Richter, Egon

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1983 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.17-18

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00053380

Digitale Bibliothek Braunschweig

Zur mathematischen Beschreibung mechanischer Systeme

– Kurzfassung –

Von **Egon Richter,** Braunschweig

In der klassischen Mechanik verwendet man zur Beschreibung mechanischer Systeme drei unterschiedliche Bilder, die als Newtonsche, Lagrangesche und Hamiltonsche Mechanik bezeichnet werden. Diese drei Beschreibungsweisen, die sich nur unter gewissen Voraussetzungen aufeinander zurückführen lassen, sind von ihrer mathematischen Struktur her in zwei verschiedene Klassen einteilbar.

Sowohl in der Newtonschen Mechanik als auch in der Lagrangeschen Mechanik sind die Grundgleichungen, aus denen die zeitliche Änderung der Systemkonfiguration bestimmt werden kann, Differentialgleichungen zweiter Ordnung. In diesen beiden Fällen liegt deshalb eine Beschreibung vor, die ein Vektorfeld auf dem Tangentialbündel über dem Konfigurationsraum benötigt. Im Unterschied dazu sind die Grundgleichungen der Hamiltonschen Mechanik Differentialgleichungen erster Ordnung, die mit Hilfe eines Vektorfeldes auf dem Kotangentialbündel (Phasenraum genannt) über dem Konfigurationsraum formuliert werden. Dieser Phasenraum, der in „natürlicher“ Weise eine symplektische Struktur besitzt, ist zur Beschreibung nichtdissipativer mechanischer Systeme offenbar besonders gut geeignet. Bekanntlich wurde die Hamiltonsche Beschreibung in der Himmelsmechanik und in der statistischen Mechnaik mit großem Erfolg benutzt und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Quantenmechanik ist unbestreitbar.

Im Zusammenhang mit Lösungsversuchen des astronomischen Mehrkörperproblems erkannte bereits H. Poincaré, daß sich die Gesamtheit möglicher Bewegungsformen des Systems allerdings nur im Rahmen einer qualitativen Theorie der Differentialgleichungen überblicken läßt. In dieser Theorie sind die singulären Punkte des Differentialgleichungssystems (auch Fixpunkte im Phasenporträt genannt), die zugleich Stellen stationärer Werte der Hamiltonfunktion sind, von besonderer Bedeutung. Aus dem Verhalten der Phasenbahnen in der Umgebung dieser Fixpunkte läßt sich nämlich auf die Stabilität der Gleichgewichtslagen schließen. Andererseits sind für die integrablen Hamiltonschen Systeme globale Aussagen auf den durch die Konstanten der Bewegung bestimmten Untermannigfaltigkeiten des Phasenraumes möglich, die keine Gleichgewichtspunkte enthalten. Diese beiden Aspekte der qualitativen Theorie können am Phasenporträt des mathematischen Pendels anschaulich erläutert werden, wobei zugleich die Nützlichkeit der Darstellung von Phasenbahnen auf nichtlinearen Mannigfaltigkeiten demonstriert werden kann. Anschließend läßt sich für ein integrables Hamiltonsches System mit zwei Freiheitsgraden (z.B. zwei

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00053380

Digitale Bibliothek Braunschweig

ungekoppelte eindimensionale harmonische Oszillatoren) die Zweckmäßigkeit der Phasenbahndarstellung auf ineinandergeschachtelten Tori nachweisen. Eine Betrachtung der Durchstoßpunkte der Phasenbahnen durch den Querschnitt der Tori (Poincaréabbildung) liefert eine Einteilung der invarianten Tori in solche mit periodischen Phasenbahnen (rational abhängige Frequenzen der Oszillatoren) und andere mit „quasi-periodischen“ Phasenbahnen (rational unabhängige Frequenzen der Oszillatoren). Das Verhalten der Tori bei Störungen des integrablen Systems war noch in der Mitte unseres Jahrhunderts weitgehend ungeklärt. Erst die Arbeiten von A.N. Kolmogorov, V.I. Arnold und J. Moser lieferten Ergebnisse, die im sog. KAM-Theorem zusammengefaßt werden. Danach zerfallen bei sehr kleinen Störungen nur solche Tori, auf denen die Frequenzen rationalabhängig sind oder in einer gewissen Umgebung zu diesen liegen. Die anderen Tori werden lediglich deformiert, bleiben aber als invariante Untermannigfaltigkeiten des Phasenraumes bestehen. Das Bild der Durchstoßpunkte der Phasenbahnen durch den Querschnitt der Tori verändert sich drastisch: die Phasenbahnpunkte zerfallender Tori verteilen sich bis auf kleine eingelagerte „Inseln“ völlig ungeordnet.

Diese Ergebnisse der qualitativen Theorie der Differentialgleichungssysteme erster Ordnung gelten nicht nur für mechanische Systeme. Bei Experimenten, die zur kontrollierten Kernfusion führen sollen, werden häufig Plasmaeinschlüsse mit toroidalen Magnetfeldkonfigurationen verwendet. Für Konfigurationen mit azimutaler Symmetrie kann man die Gleichungen, aus denen sich die Magnetfeldlinien berechnen lassen, näherungsweise in die Form Hamiltonscher Gleichungen mit einem Freiheitsgrad bringen, die stets integrabel sind. Die Magnetfeldlinien bilden ineinandergeschachtelte Torusflächen im Ortsraum und erzeugen somit eine ähnliche Struktur wie die Phasenbahnen des integrablen Hamiltonschen Systems mit zwei Freiheitsgraden im Phasenraum. Bei kleinen Störungen der azimutalen Symmetrie des Magnetfeldes verhalten sich die Magnetfeldlinien ähnlich wie die Phasenbahnen eines schwach gestörten integrablen Hamiltonschen Systems: die Durchstoßpunkte der Magnetfeldlinien im Querschnitt der Tori lassen den Zerfall bestimmter Magnetfeldflächen erkennen, wobei „magnetische Inseln“ und völlig ungeordnet verteilte Durchstoßpunkte der Magnetfeldlinien nebeneinander auftreten können.

Aussagen der qualitativen Differentialgleichungstheorie sind nicht nur für die oben betrachteten Hamiltonschen Systeme möglich, sondern auch für andere dynamische Systeme, z.B. dissipative Systeme. Die in den vergangenen zwei Jahrzehnten erreichten beachtlichen Erfolge im Bereich der dynamischen Systeme beruhen vor allem auf der Entwicklung der qualitativen Theorie.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00053380